



Über das Kursbuch

In diesem Kursbuch findest du zu jedem Abi-relevanten Thema entsprechende Merkgeregeln, Rezepte und zahlreiche Übungsaufgaben. Viele der Aufgaben sind mit Abi[★] gekennzeichnet. Ein bis drei Sterne deuten dabei den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben an. Das Taschenrechnersymbol TR zeigt an, bei welchen Aufgaben ein grafikfähiger Taschenrechner zwingend erforderlich ist. Die Lösungen aller Aufgaben sind am Ende des Buches abgedruckt. Inhalte und Aufgaben, die nur für den Leistungskurs relevant sind, haben wir gekennzeichnet.

Schreibe uns

Hast du Hinweise, Kritik oder Anmerkungen zu unserem Kursbuch, dann freuen wir uns über eine Email von dir. Wir haben auch sonst ein offenes Ohr für dich. Solltest du vor, während oder nach dem Kurs ein Anliegen haben, wende dich einfach direkt an deine*n Kursleiter*in oder schicke uns eine E-Mail an info@abiturma.de.

Viel Erfolg

Wir alle wünschen dir viel Erfolg beim Kurs, dem bevorstehenden Mathe-Abitur und auf deinem zukünftigen Lebensweg.

Dr. Aaron Kunert

Alex Bückner

Christiane Schulz

Cora-Lis Grießhaber

David Ewert

Eileen George

Maya Biersack

Rebecca Arndt

Rick Kummerow

Inhaltsverzeichnis

Analysis	13
1 Grundlagen	14
1.1 Mengensymbole	14
1.2 Bruchrechnen	14
1.3 Binomische Formeln	15
1.4 Potenzgesetze	16
1.5 Logarithmengesetze	17
2 Gleichungen	18
2.1 Quadratische Gleichungen	18
2.2 Biquadratische Gleichungen	20
2.3 Nullprodukte	22
2.4 Gleichungen mit „ x in jedem Summanden“	23
2.5 Exponentialgleichungen	24
2.6 Logarithmische Gleichungen	28
2.7 Gemischte Gleichungen	29
3 Funktionen	31
3.1 Potenzfunktionen	31
3.2 Ganzrationale Funktionen	34
3.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen	36
3.4 Zusammengesetzte Funktionen	38
4 Ableitung	40
4.1 Ableitungsregeln	40
4.2 Bedeutung der Ableitung	46
4.3 Graphisches Ableiten	49
5 Kurvendiskussion	52
5.1 Übersicht Kurvendiskussion	52
5.2 Definitionsbereich	52
5.3 Schnittpunkte mit der x -Achse	54
5.4 Schnittpunkt mit der y -Achse	56
5.5 Symmetrie	57
5.6 Monotonie und Extrempunkte	59
5.7 Krümmung und Wendepunkte	66
5.8 Verhalten im Unendlichen	71
5.9 Aufgaben zur Kurvendiskussion	74
6 Tangenten	76
6.1 Tangente an einen Kurvenpunkt	76
6.2 Tangente mit gegebener Steigung	78
7 Graphen von Funktionen in Schaubilder zeichnen	80
7.1 Strecken und Stauchen	80
7.2 Verschieben	81

7.3	Spiegeln	82
8	Integration	83
8.1	Grundlagen	83
8.2	Integrationsregeln	83
8.3	Bestimmte Integrale und Flächeninhalte	85
8.4	Mittelwert von Funktionen	91
8.5	Integralfunktionen – nur LK	92
8.6	Rotationskörper – nur LK	94
9	Besondere Aufgabentypen	96
9.1	Extremwertaufgaben	96
9.2	Steckbriefaufgaben	98
9.3	Scharen	100
9.4	Stetigkeit und Differenzierbarkeit – nur LK	103
9.5	Wachstum	104
9.6	Änderungsraten und Bestände	106
10	Umfangreiche Aufgaben	112
<hr/>		
Geometrie		115
<hr/>		
11	Grundlagen der Vektorrechnung	116
11.1	Lineare Gleichungssysteme	116
11.2	Rechnen mit Vektoren	119
12	Geometrische Objekte	126
12.1	Geraden	126
12.2	Ebenen	127
12.3	Zeichnen geometrischer Objekte	135
13	Lagebeziehungen und Schnitt	138
13.1	Lagebeziehung Gerade-Gerade	138
13.2	Schnitt Gerade-Gerade	139
13.3	Lagebeziehung Gerade-Ebene	140
13.4	Schnitt Gerade-Ebene	141
13.5	Schnittwinkel	146
14	Abstand	150
14.1	Abstand Punkt-Punkt	150
14.2	Abstand Punkt-Gerade – nur LK	150
14.3	Abstand Punkt-Ebene – nur LK	151
14.4	Abstand Gerade-Ebene – nur LK	153
14.5	Abstand Ebene-Ebene – nur LK	154
14.6	Abstand Gerade-Gerade – nur LK	155
15	Schattenpunkte – nur LK	156
16	Umfangreiche Aufgaben	158

Stochastische Matrizen	161
17 Grundlagen	162
17.1 Definition einer Matrix	162
17.2 Addition und Skalare Multiplikation von Matrizen	162
17.3 Matrizenmultiplikation	164
17.4 Matrixpotenzen	165
17.5 Inverse Matrix	166
17.6 Eigenwerte – nur LK	167
18 Übergangsmatrizen	169
18.1 Aufstellen einer Übergangsmatrix	169
18.2 Zukünftige und vergangene Zustände	170
18.3 Langfristige Verteilung	171
19 Umfangreiche Aufgaben	174
Stochastik	177
20 Wichtige Grundbegriffe	178
20.1 Der Wahrscheinlichkeitsraum	178
20.2 Laplace-Experimente	180
20.3 Vereinigung und Schnitt von Ereignissen	182
20.4 Stochastische Unabhängigkeit	185
20.5 Die Vierfeldertafel	186
20.6 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	187
21 Mehrstufige Wahrscheinlichkeiten	191
21.1 Baumdiagramme	191
21.2 Kombinatorische Abzählverfahren	193
22 Zufallsvariablen	197
22.1 Grundbegriffe	197
22.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	198
23 Binomialverteilung	201
23.1 Bernoulli-Ketten	201
23.2 Kumulierte Binomialverteilung	205
23.3 3M-Aufgaben	207
24 Normalverteilung – nur LK	209
24.1 Grundlagen – nur LK	209
24.2 Tabelle: Normalverteilung – nur LK	211
24.3 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung – nur LK	212
25 Konfidenzintervalle – nur LK	213
25.1 Konfidenzintervall verstehen – nur LK	213
25.2 Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten schätzen – nur LK	215
26 Hypothesentest – nur LK	216
26.1 Grundidee – nur LK	216
26.2 Testen von Hypothesen – nur LK	218

27 Umfangreiche Aufgaben**227**

Lösungen**229**

Rezept zum Lösen eines Nullprodukts

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$(x^2 - 4) \cdot (x - 3) = 0.$$

Es kann der Satz vom Nullprodukt angewandt werden: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Die Lösungen der Gleichung sind damit gegeben durch die Lösungen der Gleichungen


$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad x - 3 = 0,$$

also

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

$$x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 3$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also gegeben durch $\mathcal{L} = \{-2; 2; 3\}$.

Aufgabe 10 –  **Abi***

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $(x^2 - 9) \cdot (x + 5) = 0$

(b) $(x^2 - 4x + 2) \cdot (x + 3) = 0$

(c) $(x^2 + x + 4) \cdot (x^4 - 81)^2 = 0$

(d) $e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) = 0$

2.4 Gleichungen mit „x in jedem Summanden“**Quickstart Gleichung mit „x in jedem Summanden“**

► BEISPIEL: $x^4 + 2x^3 + 10x^2 = 0$

👁 ERKENNUNGSMERKMAL: In jedem Summanden tritt eine Potenz von x auf.

🔧 LÖSUNGSMETHODE: Höchste gemeinsame Potenz von x ausklammern, dann Satz vom Nullprodukt anwenden.

2.4.1 Erkennen von Gleichungen mit „x in jedem Summanden“**Was ist eine Gleichung mit „x in jedem Summanden“?**

Das Erkennungsmerkmal 👁 für eine Gleichung mit „x in jedem Summanden“ ist: Jeder Summand enthält eine Potenz von x .

Beispiel: Die folgenden Gleichungen sind vom Typ „x in jedem Summanden“:

$$7x^2 + 3x^5 + 43x = 0$$

$$15x^3 + 25x + 16x^5 = 0$$

$$423x^4 + 356x^3 + 55x^2 = 0$$

2.4.2 Lösen von Gleichungen mit „ x in jedem Summanden“


Höchste gemeinsame Potenz ausklammern


Falls eine Gleichung eine Gleichung mit „ x in jedem Summanden“ ist, kann die höchste Potenz von x ausgeklammert werden. Dann erhält man wieder eine Produktgleichung.

Rezept zum Lösen einer Gleichung mit „ x in jedem Summanden“


Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^4 + 3x^3 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung mit „ x in jedem Summanden“, denn : In der Gleichung treten lediglich Summanden auf, die Potenzen von x enthalten.

Schritt 1:  Höchste Potenz von x ausklammern Die höchstmögliche Potenz ist x^3 , damit kann x^3 ausgeklammert werden:

$$x^3 \cdot (x + 3) = 0.$$

Schritt 2:  Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$\begin{aligned} x^3 \cdot (x + 3) = 0 &\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 + 3 = 0 \\ &\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = -3. \end{aligned}$$

Es folgt also $\mathcal{L} = \{0; -3\}$.

Aufgabe 11 - Abi*

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der entsprechenden Gleichung.

(a) $12x^2 - 24x = 0$

(b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = 0$

(c) $20x^3 - 180x^2 = 0$

(d) $8x^2 - 3x^4 = -2x^3$

2.5 Exponentialgleichungen

Was ist eine Exponentialgleichung?

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung in der ausschließlich Exponentialterme und Zahlen vorkommen.

Beispiel: Die folgenden Gleichungen sind Exponentialgleichungen:

$$e^{8x} + 7e^{4x} - 8 = 0$$

$$e^{8x} + 7e^{4x} - e^{3x} = 0$$

$$e^{10x} + 9e^{7x} = 0.$$

Welche Typen von Exponentialgleichungen gibt es?

- Typ 1: 👁 Es tauchen nur Potenzen von e mit gleichem Exponenten auf. Zum Beispiel:

$$e^{3x-1} + 2 = 4 - e^{3x-1}.$$

- Typ 2: 👁 Es tauchen ausschließlich Potenzen von e mit unterschiedlichen Exponenten auf, aber dafür keine Zahlen. Zum Beispiel:

$$3e^{2x} - 4e^{5x} = 0.$$

- Typ 3: 👁 Es tauchen genau zwei unterschiedliche Potenzen von e auf (einer der beiden Exponenten ist das Doppelte des anderen Exponenten). Zum Beispiel:

$$e^{2x} - 5e^x = 36.$$

Quickstart Exponentialgleichung Typ 1

- BEISPIEL: $e^{24x-12} = 1$.

👁 ERKENNUNGSMERKMAL: Es tauchen nur Potenzen von e mit gleichem Exponenten auf.

🔧 LÖSUNGSMETHODE: Isolieren des Exponentialterms und anschließendes Logarithmieren.

Rezept zum Lösen einer Exponentialgleichungen vom Typ 1

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$5e^{2x+1} - 3 = 3e^{2x+1} + 1.$$

Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 1, denn 👁: Es tauchen nur Potenzen von e mit gleichem Exponenten und Zahlen auf.

Schritt 1: 🔧 Exponentialterm isolieren:

$$5e^{2x+1} - 3 = 3e^{2x+1} + 1$$

$$\iff 2e^{2x+1} = 4$$

$$\iff e^{2x+1} = 2.$$

Schritt 2: 🔧 Gleichung logarithmieren:

$$\ln(e^{2x+1}) = \ln(2) \iff 2x + 1 = \ln(2).$$

Schritt 3: Nach x auflösen:

$$x = \frac{\ln(2) - 1}{2}.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch: $\mathcal{L} = \left\{ \frac{\ln(2)-1}{2} \right\}$

Aufgabe 12 – Abi*

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $6e^{2x+1} - 8 = 4 - e^{2x+1}$

(b) $2e^{x^2-4} = e^{x^2-4} + 1$

Quickstart Exponentialgleichung Typ 2

- ▶ BEISPIEL: $7e^{18x} + 3e^{7x} = 0$.
- 👁 ERKENNUNGSMERKMAL: Es tauchen ausschließlich Potenzen von e mit unterschiedlichen Exponenten auf, dafür aber keine Zahlen.
- 🔑 LÖSUNGSMETHODE: Potenz mit dem kleinsten Exponenten ausklammern und anschließend Satz vom Nullprodukt anwenden.

Rezept zum Lösen einer Exponentialgleichungen vom Typ 2

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$4e^{3x} = 2e^{5x}.$$

Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 2, denn 👁: Es tauchen ausschließlich Potenzen von e mit unterschiedlichen Exponenten auf, aber dafür keine Zahlen.

Schritt 1: Alle Terme auf eine Seite bringen:

$$2e^{5x} - 4e^{3x} = 0.$$

Schritt 2: 🔑 Potenz mit dem niedrigsten Exponenten ausklammern:

$$e^{3x} \cdot (2e^{2x} - 4) = 0.$$

Schritt 3: 🔑 Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$e^{3x} = 0 \quad \text{oder} \quad 2e^{2x} - 4 = 0.$$

Schritt 4: Bestimmung der Lösungsmengen der beiden Gleichungen:

- ▶ Die Gleichung $e^{3x} = 0$ besitzt keine Lösung.
- ▶ Für die zweite Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} 2e^{2x} - 4 = 0 &\iff e^{2x} = 2 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2} \ln(2) \right\}$

Aufgabe 13 - Abi*

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

(a) $e^{4x} = e^{3x}$

(b) $e^{2x+2} = e^x$

(c) $e^{x^2+2x-4} = 4e^{2x}$

3.2 Ganzrationale Funktionen

Merke

Die **Standardform** einer ganzrationalen Funktion f ist gegeben durch:

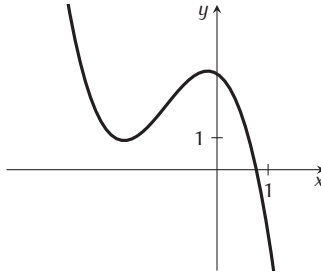
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

- Ganzrationale Funktionen heißen auch **Polynome**.
- Die höchste auftretende Potenz n heißt **Grad** der Funktion f .
- Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Tipps: Um das Verhalten im Unendlichen zu untersuchen, muss lediglich der Term mit der höchsten Potenz herangezogen werden (Vorzeichen beachten).

- Geht der Term gegen $+\infty$, geht $f(x)$ gegen $+\infty$.
- Geht der Term gegen $-\infty$, geht $f(x)$ gegen $-\infty$.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 3$ ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 3. Also kann f maximal drei Nullstellen haben. Im Schaubild kann man erkennen, dass der Graph von f genau einen Schnittpunkt mit der x -Achse hat und die Funktion f somit genau eine Nullstelle.




Für das Verhalten im Unendlichen wird der Term der höchsten Potenz untersucht, also $-x^3$.

- Für $x \rightarrow +\infty$ geht $-x^3 \rightarrow -\infty$, also $f(x) \rightarrow -\infty$.
- Für $x \rightarrow -\infty$ geht $-x^3 \rightarrow +\infty$, also $f(x) \rightarrow +\infty$.

Das Verhalten im Unendlichen lässt sich zudem am Graphen der Funktion ablesen.

Aufgabe 21 – Abi*

- (a) Warum ist $h(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ eine ganzrationale Funktion?
- (b) Was ist der Grad von h ?
- (c) Was sind die Nullstellen von h ?
- (d) Wie verhält sich die Funktion h im Unendlichen?

Aufgabe 22 –  Abi**

Ordne folgende Funktionsterme den Schaubildern zu und begründe Deine Wahl:

(a) $f(x) = x^5 - x^2 + 1$

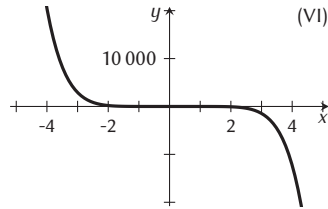
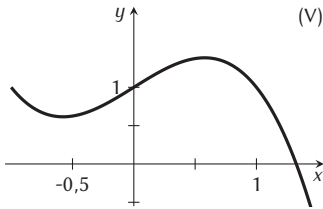
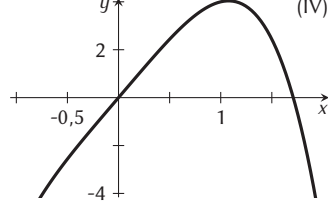
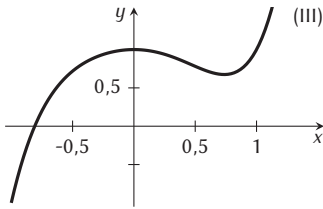
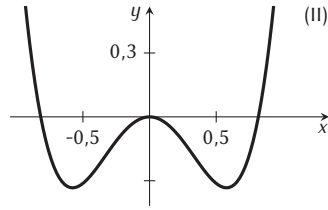
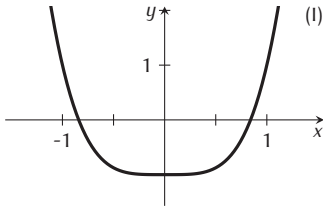
(b) $g(x) = 3x^4 - 2x^2$

(c) $h(x) = -x^3 + x + 1$

(d) $i(x) = 5x - x^4$

(e) $j(x) = -x^7 + x^6 - x$

(f) $k(x) = 2x^4 - 1$



Aufgabe 141 – nur LK Abi*

Bestimme eine Koordinaten- und eine Parameterform der folgenden Ebene:

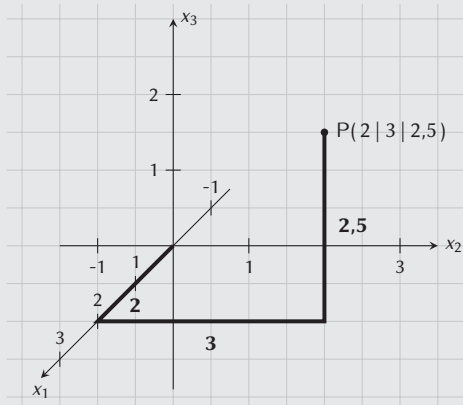
$$E : : \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = 0.$$

12.3 Zeichnen geometrischer Objekte**Dreidimensionales Koordinatensystem**

Um geometrische Objekte dreidimensional darzustellen zeichnet man ein Koordinatensystem wie es in der untenstehenden Abbildung zu sehen ist. Wichtig ist dabei, dass die Einheiten auf der x_1 -Achse kürzer sind als die auf der x_2 - und der x_3 -Achse.

Auf kariertem Papier bedeutet das, dass man vom Koordinatenursprung schräg nach links unten zeichnet und die erste Einheit genau auf das nächste Karokreuz macht. Die Einheiten auf der x_2 - und der x_3 -Achse müssen dann zwei Kästchen lang sein.

Um Punkte in das Koordinatensystem einzuzeichnen geht man nun vor wie in der Abbildung für den Punkt $P(2 \mid 3 \mid 2,5)$ dargestellt. Es werden also alle Koordinaten der Reihenfolge nach abgearbeitet.



Beispiel: nur LK – Um die Ebene

$$E: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$

im Koordinatensystem darzustellen, bietet es sich an, die Spurpunkte zu berechnen:

- Spurpunkt S_1 : Setze $x_2 = x_3 = 0$:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \implies x_1 = 1 \implies S_1(1 \mid 0 \mid 0).$$

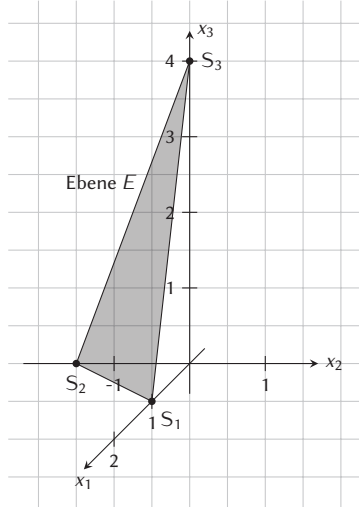
- Spurpunkt S_2 : Setze $x_1 = x_3 = 0$:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \implies x_2 = -2 \implies S_2(0 \mid -2 \mid 0).$$

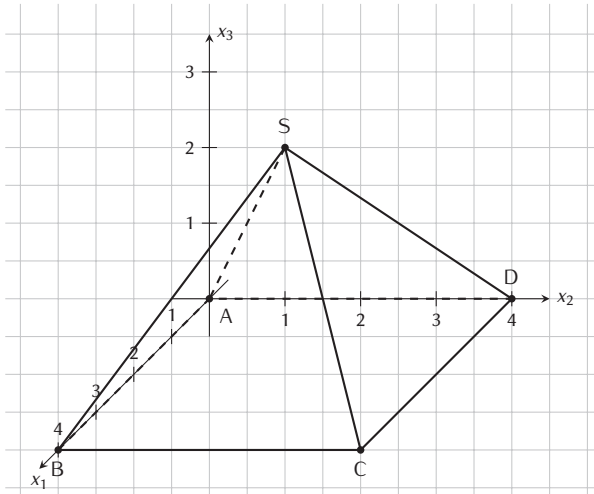
► Spurpunkt S_3 : Setze $x_1 = x_2 = 0$:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \implies x_3 = 4 \implies S_3(0 \mid 0 \mid 4)$$

Jetzt können die drei Spurpunkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden. Das Dreieck $S_1S_2S_3$ visualisiert die Ebene E .



Beispiel: Eine Pyramide besitzt die Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(4 \mid 0 \mid 0)$, $C(4 \mid 4 \mid 0)$ und $D(0 \mid 4 \mid 0)$ sowie die Spitze $S(2 \mid 2 \mid 3)$. Wie in der Abbildung zu sehen ist, werden zunächst die gegebenen Punkte eingezeichnet und dann dem Objekt entsprechend verbunden. Nicht sichtbare Verbindungslinien werden gestrichelt dargestellt.



26 Hypothesentest – nur LK

26.1 Grundidee – nur LK

Merke – nur LK

Eine Hypothese H_0 (**Nullhypothese**) ist eine Behauptung, die aufgrund einer Beobachtung abgelehnt oder angenommen werden soll.

Beispiel: Folgende Aussage ist eine typische Nullhypothese.

H_0 : Bei 70 % aller Klassenarbeiten wird abgeschrieben.

Diese Aussage kann angenommen (für wahr befunden) oder abgelehnt (für falsch befunden) werden.

Merke – nur LK

Bei einem Hypothesentest können folgende Konstellationen auftreten:

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
Das Ergebnis der Stichprobe liegt im Annahmereich von H_0 .	Richtige Entscheidung (H_0 ist wahr und die Hypothese wird angenommen.)	Falsche Entscheidung (H_0 ist falsch, aber die Hypothese wird angenommen.) Dies entspricht einem Fehler zweiter Art .
Das Ergebnis der Stichprobe liegt im Ablehnungsbereich von H_0	Falsche Entscheidung (H_0 ist korrekt, aber die Hypothese wird abgelehnt.) Dies entspricht einem Fehler erster Art .	Richtige Entscheidung (H_0 ist falsch und die Hypothese wird abgelehnt.)

Merke – nur LK

Bei Annahme oder Ablehnung einer Nullhypothese können zwei Arten von Fehlern auftreten:

- **Fehler 1. Art (α -Fehler):** H_0 wird abgelehnt, obwohl H_0 richtig ist. Beispiel:
 H_0 : Der Würfel ist fair.

Es wird sieben Mal hintereinander eine Sechs gewürfelt. Daraufhin wird der Würfel entsorgt, weil er angeblich gezinkt ist. In Wahrheit war es aber nur Zufall.

- **Fehler 2. Art (β -Fehler):** H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl H_0 falsch ist. Beispiel:
 H_0 : Der Würfel ist fair.

Bei sieben Würfeln wurde zweimal die Sechs gewürfelt. Der Würfel wird behalten, obwohl er in Wahrheit gezinkt ist.

Aufgabe 233 – nur LK

Kathrin glaubt nicht, dass andere Personen ihre Zukunft vorhersagen können. Doch dann trifft sie auf Jack. Dieser schaut sie an und behauptet, dass sie morgen 20 Euro und einen herrenlosen Hund auf der Straße finden wird. Die Vorhersage trifft ein. Setze die Geschichte auf zwei Weisen fort, sodass Kathrin aufgrund dieses Erlebnisses einen Fehler 1. Art bzw. 2. Art macht.

Merke – nur LK

- Ein **Hypothesentest** ist ein standardisiertes Verfahren zur Überprüfung einer Nullhypothese H_0 .
 - Dieser beinhaltet eine **Entscheidungsregel**, die im Vorfeld eines Experiments angibt, bei welchen Beobachtungen die Hypothese H_0 angenommen bzw. abgelehnt wird.
 - Das **Signifikanzniveau** (α -Niveau) eines Hypotesentest ist dabei die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art.

– – – – –
 Tipp: Bei einem Hypothesentest möchte man im Normalfall die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art minimieren.

Beispiel: Amazon behauptet, dass 90 % aller Bestellungen am nächsten Tag versendet werden. Der Verantwortliche für Qualitätssicherung möchte diese Behauptung überprüfen und geht dabei nach der folgenden Entscheidungsregel vor:

- 10 000 zufällig ausgewählte Bestellungen werden beobachtet.
- Falls davon 1050 oder weniger Bestellungen nicht am nächsten Tag versendet werden, dann ist alles in Ordnung.
- Falls 1051 oder mehr Bestellungen nicht am nächsten Tag versendet werden, dann ist die Behauptung nicht tragbar und Amazon kann die Hypothese nicht mehr geglaubt werden.

Aufgabe 234 – nur LK

Nachfolgend werden zwei Szenarien beschrieben. Entscheide bei jedem Szenario, ob dort im Sinne eines Hypothesentests verfahren wird und beschreibe die entsprechenden Entscheidungsregeln.

- (a) Anita ist es wichtig, dass ihr zukünftiger Partner gut küssen kann. Sie weiß, dass gutes Küssen auch eine Frage der Tagesform ist. Daher nimmt sie sich Folgendes vor: Nur wenn eine Person sich in mindestens 8 von 10 Dates als guter Küsser herausstellt, kommt er für eine Partnerschaft in Frage.
- (b) Einen Blick in die Zeitung werfend, findet Anita folgende Tabelle zur durchschnittlichen Temperatur der letzten Jahre im August auf Helgoland:

Jahr	01	02	03	04	05
Temperatur	19,3°C	20,8°C	21,2°C	21,1°C	22,9°C

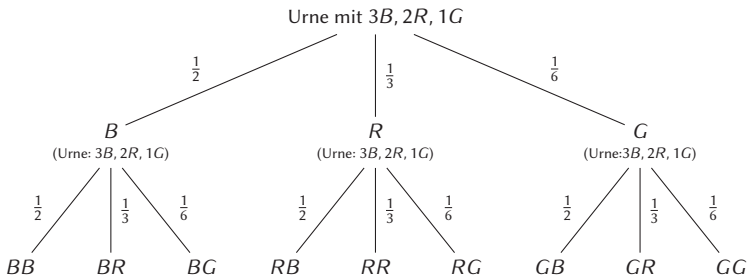
Daraufhin fühlt sich Anita in ihrer Hypothese bestätigt, dass auch in Helgoland die globale Erderwärmung stattfindet.

Lösung 198

In beiden Teilaufgaben soll das folgende Ereignis betrachtet werden:

E : Es werden zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen.

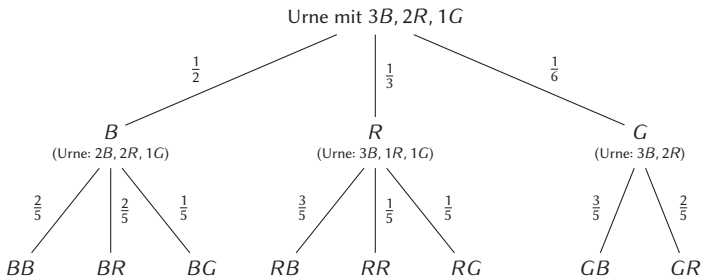
- (a) Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ beträgt beim Ziehen mit Zurücklegen:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(BR) + P(BG) + P(RB) + P(RG) + P(GB) + P(GR) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

- (b) Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ beträgt beim Ziehen ohne Zurücklegen:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(BR) + P(BG) + P(RB) + P(RG) + P(GB) + P(GR) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Lösung 199

Bei der Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten in dieser Urnenaufgabe muss beachtet werden, dass die beiden zuerst gezogenen Kugeln bei der dritten Ziehung wieder zurückgelegt werden.

- (a) Für das erste Ereignis gilt:

$$P(E_1) = P(SSS) + P(GGG) + P(BBB).$$

Zur Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten wird exemplarisch $P(SSS)$ bestimmt:

$$P(SSS) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{50}.$$

Schließlich ergibt sich:

$$P(E_1) = \frac{1}{50} + \frac{1}{225} + \frac{1}{9} = \frac{61}{450}.$$

(b) $P(E_2) = \frac{1}{5}.$

(c) $P(E_3) = \frac{1}{225}.$

(d) $P(E_4) = P(\overline{BBB}) + P(B\overline{B}\overline{B}) = \frac{1}{4}.$

Lösung 200

Die Kontrolle entspricht dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen. Ein funktionstüchtiger Mikrochip wird mit F bezeichnet. Ein defekter Mikrochip entspricht dann dem Gegenereignis \overline{F} . Die Ware wird in drei Fällen zurückgewiesen. Die Summe der dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle ergibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\overline{F}F\overline{F}) + P(\overline{F}\overline{F}F) + P(\overline{F}\overline{F}\overline{F}) \approx 0,071777$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ware zurückgewiesen wird, beträgt etwa 7,2%.

Lösung 201

Da zwei der Kugeln von U_2 in U_1 umgelegt werden, befinden sich in U_1 zum Zeitpunkt der Ziehung $6 + 2 = 8$ Kugeln. Zuerst werden die Wahrscheinlichkeiten für die Ziehungen in U_2 berechnet. Dabei gilt beim Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(2S) = \frac{2}{5}$$

$$P(2W) = \frac{1}{15}$$

$$P(1S, 1W) = \frac{8}{15}$$

- (a) Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die gezogene Kugel grün ist: Da sich in U_2 keine grünen Kugeln befanden, sind zwei der acht Kugeln grün. Also gilt für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$$P(G) = \frac{1}{4}.$$

- (b) Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die gezogene Kugel weiß ist: Da